数理解析研究所講究録
429巻 1981年 109-122

Williamson 等式の拡張

東女大 文理　　山本幸一

1. n 次巡回行列は，基本的巡回行列 $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \; 0 \end{pmatrix}$ の多項式で，逆巡回行列は，巡回行列と基本的逆巡回行列 $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & ⋰ & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の積を言う．巡回行列 A に対して $RAR=A^*$ であるから，AR は対称行列になる．また巡回行列 A, B に対して $(AR)B^*=B(AR)=B(AR)^*$ が成立つ．ゆえに 4 つの巡回行列 A, B, C, D から $4n$ 次の行列

$$H=\begin{pmatrix} AR & B & C & D \\ -B & AR & D^* & -C^* \\ -C & -D^* & AR & B^* \\ -D & C^* & -B^* & AR \end{pmatrix}$$

を作れば，それは条件

$$HH^*=(AA^*+BB^*+CC^*+DD^*)\otimes I_4$$

を満たす．もし A, B, C, D の成分が ± 1 で

$$AA^* + BB^* + CC^* + DD^* = 4n I$$

が成立するならば H は $4n$ 次の Hadamard 行列を与える．これが Goethals-Seidel 型の Hadamard 行列と呼ばれるものと本質的に同一である．

2. 今 $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i$, $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i$, $C = \sum_{i=0}^{n-1} c_i T^i$, $D = \sum_{i=0}^{n-1} d_i T^i$ と置いて，それらの生成多項式 $F_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, $F_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$, $F_3(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$, $F_4(x) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i x^i$ を定義すれば，各係数が ± 1 で

$$(1) \qquad F_1(x)F_1(x^{-1}) + F_2(x)F_2(x^{-1}) + F_3(x)F_3(x^{-1}) + F_4(x)F_4(x^{-1}) \equiv 4n \pmod{x^n - 1}$$

が成立つならば Goethals-Seidel 型 Hadamard 行列が出来る．

$a_i = 1$ なる添数 i の集合を $\mathbf{A}$ とし；その濃度を $k_1 = \#\mathbf{A}$ とし，$P_1(x) = \sum_{i \in \mathbf{A}} x^i$ と置き，また $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ や k_2, k_3, k_4 及び $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ を同様に定義する．そして

$$T(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

とすれば

$$\begin{aligned} F_1(x)F_1(x^{-1}) &= (2P_1(x) - T(x))(2P_1(x^{-1}) - T(x)) \\ &\equiv 4P_1(x)P_1(x^{-1}) - 4P_1(1)T(x) + T(1)T(x) \\ &\equiv 4P_1(x)P(x^{-1}) - (4k_1 - n)T(x) \qquad \pmod{x^n - 1} \end{aligned}$$

だから，(1) は

$$(2) \qquad P_1(x)P_1(x^{-1}) + P_2(x)P_2(x^{-1}) + P_3(x)P_3(x^{-1}) + P_4(x)P_4(x^{-1}) \equiv$$

$$\equiv n+\lambda T(x) \qquad (\mathrm{mod}\ x^n-1),$$

$$\lambda = k_1+k_2+k_3+k_4-n.$$

となる．一般に $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ の部分集合 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ について

$$x-y\equiv l \ (\mathrm{mod}\ n), \quad x\in\mathbf{P},\ y\in\mathbf{Q}$$

の解の個数を $[\mathbf{P},\mathbf{Q}]_l$ で表わせば，條件(2) は $l\not\equiv 0$ のとき

$$[\mathbf{A},\mathbf{A}]_l+[\mathbf{B},\mathbf{B}]_l+[\mathbf{C},\mathbf{C}]_l+[\mathbf{D},\mathbf{D}]_l=\lambda$$

となり，この事は $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ は“相補差集合”(supplementary difference set) を作ることを意味する．

3. 以下われわれは n が奇数の場合だけを考察する．Williamson 型の場合には (2) において $P_i(x)=P_i(x^{-1})$ が要求されている．もし $0\in\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C}\cap\mathbf{D}$ を仮定すれば，k_1, k_2, k_3, k_4 が奇数，従って λ も奇数となるから

$$P_1(x^2)+P_2(x^2)+P_3(x^2)+P_4(x^2)\equiv P_1(x)^2+P_2(x)^2+P_3(x)^2+P_4(x)^2$$

$$\equiv n+\lambda T(x)\equiv 1+T(x)\equiv\sum_{i=1}^{n-1}x^i\equiv\sum_{i=1}^{n-1}x^{2i} \qquad (\mathrm{modd}\ (2, x^n-1))$$

となり，$i=1, 2, \cdots, n-1$ に対して a_i, b_i, c_i, d_i のうち $+1$ に等しいものの個数は必らず奇数となる．

Goethals-Seidel 型の場合については，$0\in\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C}\cap\mathbf{D}$ は無難に要求できるが，a_i, b_i, c_i, d_i のうちの $+1$ の個数に関しては特別な制限は出て来ない．しかし，われわれは $i\geqq 1$ の時

(4) a_i, b_i, c_i, d_i のうち正のものは奇数個だけある：

$$a_i b_i c_i d_i = -1 \qquad (i=1, 2, \cdots, n-1)$$

ことを仮定するものとする.

そうすれば Williamson 型の場合と同様な変形が可能になる. それを以下に示そう.

$i \geqq 1$ のとき a_i, b_i, c_i, d_i の分布は

a_i	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
b_i	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
c_i	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
d_i	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

の8種類だけが可能であるが, そのような分布を示す添数 i の集合をこの順に $\mathbf{A}_+, \mathbf{B}_+, \mathbf{C}_+, \mathbf{D}_+, \mathbf{A}_-, \mathbf{B}_-, \mathbf{C}_-, \mathbf{D}_-$ で表わせば, $\Omega = \{1, 2, \cdots, n-1\}$ がこれら8個の部分集合に分割される. (たとえば

$$a_i = 1 \iff i \in \mathbf{A}_- \cup \mathbf{B}_+ \cup \mathbf{C}_+ \cup \mathbf{D}_+ ,$$

$$a_i = -1 \iff i \in \mathbf{A}_+ \cup \mathbf{B}_- \cup \mathbf{C}_- \cup \mathbf{D}_-$$

であるから,

$$F_1(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i = 1 + \sum_{m \in \mathbf{A}_-} x^m + \sum_{m \in \mathbf{B}_+} x^m + \sum_{m \in \mathbf{C}_+} x^m + \sum_{m \in \mathbf{D}_+} x^m$$

$$- \sum_{m \in \mathbf{A}_+} x^m - \sum_{m \in \mathbf{B}_-} x^m - \sum_{m \in \mathbf{C}_-} x^m - \sum_{m \in \mathbf{D}_-} x^m$$

$$= 1 - S_{\mathbf{A}} + S_{\mathbf{B}} + S_{\mathbf{C}} + S_{\mathbf{D}} ,$$

但し $S_{\mathbf{A}} = \sum_{m \in \mathbf{A}_+} x^m - \sum_{m \in \mathbf{A}_-} x^m$ 等, となる. 故に (1) に戻って

記号 $\bar{S}_A=\sum_{m\in A_+}x^{-m}-\sum_{m\in A_-}x^{-m}$ 等を用いて

$$F_1(x)F_1(x^{-1})+F_2(x)F_2(x^{-1})+F_3(x)F_3(x^{-1})+F_4(x)F_4(x^{-1})$$

$$=(1-S_A+S_B+S_C+S_D)(1-\bar{S}_A+\bar{S}_B+\bar{S}_C+\bar{S}_D)+(1+S_A-S_B+S_C+S_D)(1+\bar{S}_A-\bar{S}_B+\bar{S}_C+\bar{S}_D)$$
$$+(1+S_A+S_B-S_C+S_D)(1+\bar{S}_A+\bar{S}_B-\bar{S}_C+\bar{S}_D)+(1+S_A+S_B+S_C-S_D)(1+\bar{S}_A+\bar{S}_B+\bar{S}_C-\bar{S}_D)$$
$$=(1+2S_A)(1+2\bar{S}_A)+(1+2S_B)(1+2\bar{S}_B)+(1+2S_C)(1+2\bar{S}_C)+(1+2S_D)(1+2\bar{S}_D)$$
$$\equiv 4n \qquad (\mathrm{mod}\ x^n-1)$$

となる.

特に $x=1$ と置けば, $W_1=\#A_+-\#A_-$, $W_2=\#B_+-\#B_-$ 等について

$$(1+2W_1)^2+(1+2W_2)^2+(1+2W_3)^2+(1+2W_4)^2=4n.$$

なおこの際

$$W_1+W_2+W_3+W_4\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2)$$

が必要である.

<u>定理</u>. 集合 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ を8個の部分集合 $A_+, A_-, B_+, B_-, C_+, C_-, D_+, D_-$ に分解し, $A=A_+\cup A_-$, $B=B_+\cup B_-$, $C=C_+\cup C_-$, $D=D_+\cup D_-$ とおいて, e_m は $A_+\cup B_+\cup C_+\cup D_+\ni m$ のとき 1 を $A_-\cup B_-\cup C_-\cup D_-\ni m$ のとき -1 を表わすとする. この際

$$N\Big(1+2\sum_{m\in A}e_m x^m\Big)+N\Big(1+2\sum_{m\in B}e_m x^m\Big)+N\Big(1+2\sum_{m\in C}e_m x^m\Big)$$
$$+N\Big(1+2\sum_{m\in D}e_m x^m\Big)\equiv 4n$$
$$(\mathrm{mod}\ x^n-1)$$

が成立てば, $4n$ 次の Goethals-Seidel 型 Hadamard 行列を作ることができる. ここに N は相対ノルムを表わす, 即ち $Nf(x)=$

$f(x)f(x^{-1})$ とする．

この定理において部分集合 $\mathbf{A}_+, \mathbf{A}_-$, … のどれもが自己同型 $x \longrightarrow x^{-1}$ で不変である場合には $u_m = x^m + x^{-m}$ と書いて，$\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0, \mathbf{D}_0$ はそれぞれ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ を"半分にした"集合とすれば，古典的な Williamson 等式

$$\Big(1+2\sum_{m\in\mathbf{A}_0} e_m u_m\Big)^2 + \Big(1+2\sum_{m\in\mathbf{B}_0} e_m u_m\Big)^2 + \Big(1+2\sum_{m\in\mathbf{C}_0} e_m u_m\Big)^2 + \Big(1+2\sum_{m\in\mathbf{D}_0} u_m u_m\Big)^2$$
$$\equiv 4n \quad (\mathrm{mod}\ x^n-1)$$

が現われる．

4. 前掲の公式

$$(1+2S_{\mathbf{A}})(1+2\bar{S}_{\mathbf{A}}) + (1+2S_{\mathbf{B}})(1+2\bar{S}_{\mathbf{B}}) + (1+2S_{\mathbf{C}})(1+2\bar{S}_{\mathbf{C}})$$
$$+ (1+2S_{\mathbf{D}})(1+2\bar{S}_{\mathbf{D}}) = 4n$$

に戻ってその左辺を変形すると，それは

$$(5)\quad S_{\mathbf{A}}\bar{S}_{\mathbf{A}} + S_{\mathbf{B}}\bar{S}_{\mathbf{B}} + S_{\mathbf{C}}\bar{S}_{\mathbf{C}} + S_{\mathbf{D}}\bar{S}_{\mathbf{D}}$$
$$+\frac{1}{2}(S_{\mathbf{A}}+\bar{S}_{\mathbf{A}}+S_{\mathbf{B}}+\bar{S}_{\mathbf{B}}+S_{\mathbf{C}}+\bar{S}_{\mathbf{C}}+S_{\mathbf{D}}+\bar{S}_{\mathbf{D}}) = n-1$$

の形になる．たとえば

$$S_{\mathbf{A}}\bar{S}_{\mathbf{A}} = \sum_{\ell=0}^{n-1}\Big([\mathbf{A}_+, \mathbf{A}_+]_\ell + [\mathbf{A}_-, \mathbf{A}_-]_\ell - [\mathbf{A}_+, \mathbf{A}_-]_\ell - [\mathbf{A}_-, \mathbf{A}_+]_\ell\Big)x^\ell$$

であるから，(5) においてまず

$$S_{\mathbf{A}}\bar{S}_{\mathbf{A}} + S_{\mathbf{B}}\bar{S}_{\mathbf{B}} + S_{\mathbf{C}}\bar{S}_{\mathbf{C}} + S_{\mathbf{D}}\bar{S}_{\mathbf{D}}$$
$$= \#\mathbf{A}_+ + \#\mathbf{A}_- + \#\mathbf{B}_+ + \#\mathbf{B}_- + \#\mathbf{C}_+ + \#\mathbf{C}_- + \#\mathbf{D}_+ + \#\mathbf{D}_- +$$
$$+\sum_{\ell=1}^{n-1} X_\ell x^\ell - \sum_{\ell=1}^{n-1} Y_\ell x^\ell = n-1 + \sum_{\ell=1}^{n-1}(X_\ell - Y_\ell)x^\ell$$

となる．ここに

$$
(6)\quad \begin{cases} X_\ell = [A_+, A_+]_\ell + [A_-, A_-]_\ell + [B_+, B_+]_\ell + [B_-, B_-]_\ell + [C_+, C_+]_\ell + \\ \qquad + [C_-, C_-]_\ell + [D_+, D_+]_\ell + [D_-, D_-]_\ell, \\ Y_\ell = [A_+, A_-]_\ell + [A_-, A_+]_\ell + [B_+, B_-]_\ell + [B_-, B_+]_\ell + [C_+, C_-]_\ell + \\ \qquad + [C_-, C_+]_\ell + [D_+, D_-]_\ell + [D_-, D_+]_\ell . \end{cases}
$$

更に (5) の左辺の才2項では

$$
\frac{1}{2}(s_A + \bar{s}_A + s_B + \bar{s}_B + s_C + \bar{s}_C + s_D + \bar{s}_D)
$$

$$
= \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n-1}\Big([A_+]_\ell - [A_-]_\ell + [-A_+]_\ell - [-A_-]_\ell + [B_+]_\ell - [B_-]_\ell + [-B_+]_\ell - [-B_-]_\ell
$$

$$
+ [C_+]_\ell - [C_-]_\ell + [-C_+]_\ell - [-C_-]_\ell + [D_+]_\ell - [D_-]_\ell + [-D_+]_\ell - [-D_-]_\ell\Big) x^\ell
$$

となる。ここで

$$
\left.\begin{aligned} [P]_\ell = [P, 0]_\ell &= 1 \qquad (\ell \in P \text{ のとき}) \\ &= 0 \qquad (\ell \notin P \text{ のとき}) \end{aligned}\right\}
$$

は P の特性函数を表わす記号である。上式と

$$
[A_+]_\ell + [A_-]_\ell + [B_+]_\ell + [B_-]_\ell + [C_+]_\ell + [C_-]_\ell + [D_+]_\ell + [D_-]_\ell = 1,
$$

$$
[-A_+]_\ell + [-A_-]_\ell + [-B_+]_\ell + [-B_-]_\ell + [-C_+]_\ell + [-C_-]_\ell + [-D_+]_\ell + [-D_-]_\ell = 1
$$

の各 $\frac{1}{2}$ 倍を加えて

$$
\frac{1}{2}(s_A + \bar{s}_A + s_B + \bar{s}_B + s_C + \bar{s}_C + s_D + \bar{s}_D) + T(x) - 1
$$

$$
= \sum_{\ell=1}^{n-1}\Big([A_+]_\ell + [-A_+]_\ell + [B_+]_\ell + [-B_+]_\ell + [C_+]_\ell + [-C_+]_\ell + [D_+]_\ell + [-D_+]_\ell\Big) x^\ell
$$

$$
= \sum_{\ell=1}^{n-1} Z_\ell x^\ell,
$$

$$
(7)\quad Z_\ell = [A_+]_\ell + [A_+]_{-\ell} + [B_+]_\ell + [B_+]_{-\ell} + [C_+]_\ell + [C_+]_{-\ell} + [D_+]_\ell + [D_+]_{-\ell} .
$$

(6) と (7) で定義される数 X_ℓ, Y_ℓ, Z_ℓ について，(5) は

$$X_l - Y_l + Z_l = 1 \qquad (l = 1, 2, \cdots, n-1)$$

と同値になる.

6. n が与えられた時, 我我の条件を満たす分割 $\mathbf{A}_+, \mathbf{A}_-, \cdots$ を見付ける具体的手順は次のようになるであろう.

まず $4n$ を4つの奇数の平方和に分けて

$$4n = (1+2W_1)^2 + (1+2W_2)^2 + (1+2W_3)^2 + (1+2W_4)^2,$$

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2)$$

なるものとし, 次に

$$\begin{cases} a_+ - a_- = W_1, \quad b_+ - b_- = W_2, \quad c_+ - c_- = W_3, \quad d_+ - d_- = W_4, \\ a_+ + a_- + b_+ + b_- + c_+ + c_- + d_+ + d_- = n-1 \end{cases}$$

を満たす非負整数 $a_+, a_-, b_+, b_-, c_+, c_-, d_+, d_-$ を求める. そして $\#\mathbf{A}_+ = a_+$, $\#\mathbf{A}_- = a_-$, $\#\mathbf{B}_+ = b_+$, $\#\mathbf{B}_- = b_-$, $\#\mathbf{C}_+ = c_+$, $\#\mathbf{C}_- = c_-$, $\#\mathbf{D}_+ = d_+$, $\#\mathbf{D}_- = d_-$ を満足するような分割 $\mathbf{A}_+, \mathbf{A}_-, \mathbf{B}_+, \mathbf{B}_-, \cdots$ を作る.

これら8個の部分集合が与えられたとして, $l \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n)$ に対して, l を

$\mathbf{A}_+$ の元と $\mathbf{A}_+$ の元の差として表わす方法の数,

$\mathbf{A}_-$ 〃 $\mathbf{A}_-$ 〃

$\mathbf{B}_+$ 〃 $\mathbf{B}_+$ 〃

$\mathbf{B}_-$ 〃 $\mathbf{B}_-$ 〃

$\mathbf{C}_+$ 〃 $\mathbf{C}_+$ 〃

$\mathbf{C}_-$ 〃 $\mathbf{C}_-$ 〃

D_+　〃　D_+　〃

D_-　〃　D_-　〃

の総計を X_ℓ とする．また ℓ を

A_+ の元と A_- の元の差として表わす方法の数，

B_+　〃　B_-　〃

C_+　〃　C_-　〃

D_+　〃　D_-　〃

の総計を Y_ℓ とする．さらに Z_ℓ は

$$\left.\begin{array}{ll} \ell \in A_+ \cup B_+ \cup C_+ \cup D_+ & \text{のとき } 1 \\ -\ell \in A_+ \cup B_+ \cup C_+ \cup D_+ & \text{のとき } 1 \end{array}\right\} \text{と数えた総和}$$

とする．この時凡ての ℓ について

$$X_\ell - Y_\ell + Z_\ell = 1$$

が成立すれば，分割 $A_+, A_-, B_+, B_-, C_+, C_-, D_+, D_-$ から Goethals-Seidel 型の Hadamard 行列が得られる．

7. ● $n=3$ とすると $12=1^2+1^2+1^2+3^2$ で，W_1, W_2, W_3, W_4 は（順序を無視して）2通りだけある．

$W_1 =$	0	0
$W_2 =$	0	0
$W_3 =$	0	-1
$W_4 =$	-2	1

それらから分割

$$A_+ = \emptyset \qquad A_- = \emptyset$$
$$B_+ = \emptyset \qquad B_- = \emptyset$$
$$C_+ = \emptyset \qquad C_- = \emptyset$$
$$D_+ = \emptyset \qquad D_- = \{1, 2\}$$

及び

$$A_+ = \emptyset \qquad A_- = \emptyset$$
$$B_+ = \emptyset \qquad B_- = \emptyset$$
$$C_+ = \emptyset \qquad C_- = \{1\}$$
$$D_+ = \{2\} \qquad D_- = \emptyset$$

を得る．初めのものはWilliamson方程式に対応する．後の方は等式

$$12 = 1^2 + 1^2 + (1-2x)(1-2x^2) + (1+2x^2)(1+2x)$$

に対応する．

● $n=5$ では $20 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2$ で，W_1, W_2, W_3, W_4 は：

W_1	0	0	-1	0
W_2	0	-1	-1	0
W_3	-2	1	1	1
W_4	-2	-2	1	1

の4種がある．始めの3つでは $a_+, a_-, b_+, b_-, c_+, c_-, d_+, d_-$ が一意的に決まる．前の例に対応して要点だけを表にまとめると次のようになる．

0	∅	∅	0	∅	∅
0	∅	∅	−1	∅	1
−2	∅	1, 4	1	2	∅
−2	∅	2, 3	−2	∅	3, 4

−1	∅	1	0	1	2
−1	∅	2	0	∅	∅
1	3	∅	1	3	∅
1	4	∅	1	4	∅

0	1	4	0	∅	∅
0	∅	∅	0	∅	∅
1	2	∅	1	1, 2	3
1	3	∅	1	4	∅

● $n=7$ については

$$28 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2,$$

W_1	0	0	0	−1	−1	0	−1	0
W_2	0	0	−1	−1	1	1	1	−2
W_3	0	−1	−1	−1	1	1	−2	−2
W_4	2	−3	2	−3	1	−2	−2	−2

$28=1^2+1^2+1^2+5^2$.

0	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0	*	*	1	2	1	2	1	2	1	2	1	3
0	16	25	3	4	3	6	4	3	6	4	5	4
2	34	*	56	*	45	*	56	*	35	*	26	*

	*	*	*	*	*	*	*	*
	1	5	1	5	*	*	*	*
	3	4	4	3	1	2	1	3
	26	*	26	*	345	6	245	6

0	*	*	*	*	*	*	*	*
0	1	2	1	2	1	3	*	*
-1	*	4	*	5	*	5	1	25
-3	*	356	*	346	*	246	*	346

0	1	2	1	2	1	3	1	3	1	6	1	6
-1	*	3	*	3	*	4	*	5	*	2	*	3
-1	*	5	*	6	*	6	*	6	*	4	*	4
2	46	*	45	*	25	*	24	*	35	*	25	*

	1	6	*	*	*	*	*	*	*	*
	*	3	1	24	1	25	*	1	*	1
	*	5	*	5	*	3	*	2	*	6
	24	*	36	*	46	*	345	6	345	2

-1	*	1	*	1
-1	*	2	*	2
-1	*	4	*	5
-3	*	356	*	346

$28=1^2+3^2+3^2+3^2$.

-1	*	1	*	1	*	1	*	1	*	1	*	1
1	2	*	2	*	2	*	3	*	3	*	5	*
1	3	*	5	*	6	*	5	*	6	*	6	*
1	56	4	34	6	45	3	46	2	45	2	23	4

0	1	2	1	4	1	6	*	*	*	*	*	*
1	4	*	3	*	2	*	13	2	13	4	1	*
1	6	*	5	*	4	*	6	*	6	*	6	*
-2	*	35	*	26	*	35	*	45	*	25	4	235

-1	*	1	*	1	*	1
1	2	*	3	*	5	*
-2	*	36	*	24	*	24
-2	*	45	*	56	*	36

0	*	*	*	*
-2	*	13	*	16
-2	*	26	*	25
-2	*	45	*	34

$n=5$ の場合は6個の解のうち唯1個（最初のもの）がWilliamson型に属し，$n=7$ の場合は44個のうち唯2つ（最初と最後）がWilliamson型に属する．

8. Williamson型の場合は $A_+, A_-, \cdots$ がそれぞれに，自己同型 $x \to x^{-1}$ で不変であり，逆にその性質で特長づけられる．今，$n=p$ を素数（巾）とし，対応する剰余類乗法群の中で位数3の元 ω をえらんで $x \to x^{\omega}$ に対応する自己同型が，各部分集合 $A_+, A_-, \cdots$ を不変に保つとするならば，$p \equiv 1 \pmod 3$ が必要である外に

$$4p = (1+6w_1)^2 + (1+6w_2)^2 + (1+6w_3)^2 + (1+6w_4)^2$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \equiv 0 \pmod 2$$

が解けなければならない．これはまた《任意の自然数 >1 は4個の五角数の和である》というFermat以来の推測に関連する．すなわち $n>1$ ならば

$$\left\{ n = \frac{3k_1^2+k_1}{2} + \frac{3k_2^2+k_2}{2} + \frac{3k_3^2+k_3}{2} + \frac{3k_4^2+k_4}{2}, \right.$$

k_1, k_2, k_3, k_4 のうち負であるものの数は偶数に解がある．そしてこのような分解様式を持つ部分集合 A_+，A_-，…が存在するのではないかと思われる．Wallis の本に載せられている $n=43$，$4n=1^2+1^2+1^2+13^2$，$w_1=w_2=w_3=0$，$w_4=2$ に対応する例は Williamson 自身の発見にかかわるものであって，この範疇に入る．

また $p=a^2+27b^2$ の形の場合（2 が p の立方剰余）には，或は Gauss の和によるパラメーター表示を持つ無限系列が存在するかも知れない．$p=31, 43, 109, 127, 157, 223, 229, 277, 283, \dots$ である．$p=67$ の場合は $4\cdot 67=1^2+7^2+7^2+13^2$，$w_1=0, w_2=1, w_3=1, w_4=2$ だから，その計算を実行すれば 268 次の Hadamard 行列が見付るかも知れない．